## 7.3.6 Obecná rovnice přímky II

**Předpoklady:** 070305

**Pedagogická poznámka:** Hodina neobsahuje novou látku. Studenti si mají samostatným počítáním upevnit dosud probrané.

**Př. 1:** Napiš obecnou rovnici přímky *AB*, $A[1;-2]$, $B[2;2]$.

Směrový vektor: $B-A=(1;4)$.

Normálový vektor: $\boldsymbol{n}=(4;-1)$.

Obecná rovnice přímky: $ax+by+c=0 \Rightarrow 4x-y+c=0$.

Hledáme koeficient *c* dosazením bodu *A*: $4\cdot 1-1(-2)+c=0 \Rightarrow c=-6$.

Obecná rovnice přímky: $4x-y-6=0$.

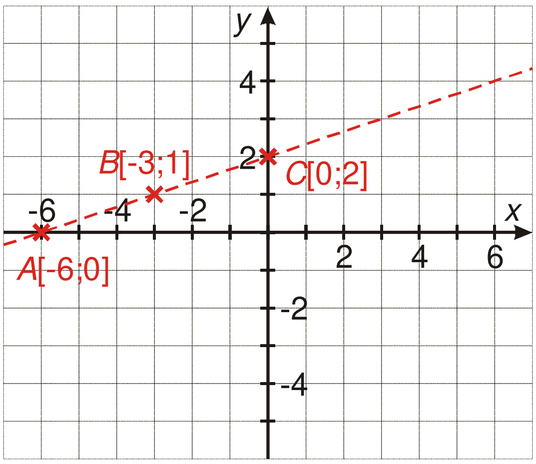
**Př. 2:** Je dána přímka *p*: $x-3y+6=0$. Najdi souřadnice tří bodů, které leží na této přímce a zakresli tyto body do soustavy souřadnic.

Rovnice svazuje hodnoty souřadnic *x* a *y* $\Rightarrow$ jednu souřadnici si volíme, druhou dopočítáváme. Lepší je volit si souřadnici *y* (před *x* je koeficient 1 $\Rightarrow$ nebudeme muset dělit a nebudou vycházet zlomky). Vyjádříme si *x* pro snazší výpočty:

$x-3y+6=0 \quad / +3y-6$

$x=3y-6$

- $y=0$: $x=3y-6=3\cdot 0-6=-6 \Rightarrow$ bod $A[-6;0]$,
- $y=1$: $x=3y-6=3\cdot 1-6=-3 \Rightarrow$ bod $B[-3;1]$,
- $y=2$: $x=3y-6=3\cdot 2-6=0 \Rightarrow$ bod $C[0;2]$,
- …




Body leží na přímce.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad není součástí předchozí hodiny úmyslně. Jde o to, aby se studenti otestovali, co jsou schopni z minulé hodiny rychle použít.

**Př. 3:** Urči, které z následujících rovnic určují stejnou přímku.
a) $2x - y + 3 = 0$ b) $2x - 3y + 3 = 0$ c) $4x + 6y + 6 = 0$
d) $-x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$ e) $4x - 6y + 3 = 0$

Všechny rovnice upravíme tak, aby před *x* byla jednička.

a) $2x - y + 3 = 0 \Rightarrow x - \frac{y}{2} + \frac{3}{2} = 0$

b) $2x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 0$

c) $4x + 6y + 6 = 0 \Rightarrow x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 0$

d) $-x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 0$

e) $4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{4} = 0$

Stejnou přímku určují rovnice b) a d).

**Dodatek:** Rovnice samozřejmě můžeme upravit i jinak, například tak, aby před *x* byla vždy dvojka. Tím si ušetříme část dělení a získané rovnice budou obsahovat méně zlomků.

**Př. 4:** Rozhodni, jak můžeme u přímek zapsaných pomocí obecné rovnice, rozhodnout o jejich rovnoběžnosti. Které z přímek uvedených v předchozím příkladu jsou rovnoběžné s přímkou $2x - 3y + 3 = 0$?

Přímky jsou rovnoběžné, když jejich normálové vektory mají stejný směr $\Rightarrow$ normálové vektory takových přímek jsou svými násobky.
Při hledání rovnoběžných přímek se zabýváme pouze koeficienty *a*, *b* $\Rightarrow$ s přímkou $2x - 3y + 3 = 0$ jsou z přímek zadaných v příkladu 4 rovnoběžné přímky $-x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$ (ta je s ní totožná) a $4x - 6y + 3 = 0$.

**Př. 5:** Najdi obecnou rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou $2x - 3y + 1 = 0$ a prochází bodem $K[-2;3]$.

Rovnoběžka s přímkou $2x - 3y + 1 = 0$ má stejný normálový vektor (nebo jeho násobek, ale to je komplikace) $\Rightarrow$ rovnice se bude lišit pouze v parametru *c*.
$2x - 3y + c = 0$
Dosadíme bod $K[-2;3]$: $2x - 3y + c = 2(-2) - 3 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = 13$.
Přímka rovnoběžná s přímkou $2x - 3y + 1 = 0$ procházející bodem $K[-2;3]$ má rovnici $2x - 3y + 13 = 0$.

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad dobře dokumentuje problémy části studentů s matematikou. Všechny informace potřebné k jeho vyřešení studenti mají, přesto čekají až jim ho někdo ukáže, protože takový příklad ještě nedělali.

**Př. 6:** Najdi obecnou rovnici přímky, která je kolmá na přímku $2x-3y+1=0$ a prochází bodem $K[-2;3]$.

Normálový vektor hledané kolmice je kolmý na vektor $(2;-3)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}=(3;2)$ $\Rightarrow$
$3x+2y+c=0$.
Dosadíme bod $K[-2;3]$: $3(-2)+2\cdot 3+c=0$ $\Rightarrow$ $c=0$.
Přímka kolmá na přímku $2x-3y+1=0$ procházející bodem $K[-2;3]$ má rovnici
$3x+2y=0$.

**Př. 7:** Urči vzájemnou polohu přímek $p:3x+2y+1=0$ a $q:x-3y+4=0$. Pokud jsou přímky různoběžné, urči jejich průsečík.

Stejně jako u parametrického vyjádření se nejdříve zajímáme o směr přímek (který udávají vektory, tentokrát normálové): $\boldsymbol{n}_p=(3;2)$ $\boldsymbol{n}_q=(1;-3)$
Normálové vektory nemají stejný směr (jeden není násobek druhého) $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné.
Hledáme průsečík (bod, který vyhovuje oběma rovnicím) $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} 3x+2y+1&=0 \\ x-3y+4&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x+2y+1=0 \\ [\![1]\!]-3[\![2]\!] \qquad & 11y-11=0 \end{aligned}$$

$y=1$
Dopočítáme *x*: $x-3y+4=x-3\cdot 1+4=0$.
$x=-1$
Přímky *p* a *q* jsou různoběžné a protínají se v bodě $P[-1;1]$.

**Př. 8:** Najdi společné body přímek $p=\{[2-3t;1+2t],t\in R\}$ a $r:2x+3y-7=0$. Podle počtu nalezených bodů rozhodni o jejich vzájemné poloze. Jaký vztah musí být mezi směrovým vektorem přímky *p* a normálovým vektorem přímky *r*? Ověř.

Přímka *p*: $\begin{aligned} x&=2-3t \\ y&=1+2t, t\in R \end{aligned}$, přímka *r*: $2x+3y-7=0$.
Společné body obou přímek musí vyhovovat oběma vyjádřením $\Rightarrow$ soustava tří rovnic o třech neznámých.

$x=2-3t$
$y=1+2t$ $\Rightarrow$ Z první a druhé rovnice dosadíme do třetí.
$2x+3y-7=0$

$2(2-3t)+3(1+2t)-7=0$
$4-6t+3+6t-7=0$
$0=0$ $\Rightarrow$ Přímky mají nekonečně mnoho společných bodů (za *t* můžeme dosadit cokoliv) $\Rightarrow$ přímky *p* a *r* jsou totožné.

Přímky mají stejný směr $\Rightarrow$ normálový vektor přímky *r* musí být kolmý nejen na přímku *r*, ale i na přímku *p* $\Rightarrow$ musí platit $\boldsymbol{n}_r \cdot \boldsymbol{u}_p = 0$.

$(-3;2)(2;3) = (-3)\cdot 2 + 2\cdot 3 = 0$

**Pedagogická poznámka:** U předchozího příkladu žáci často začnou řešit vzájemnou polohu přímek z jejich vektorů místo počítání průsečíků.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad vyžaduje pouze orientaci ve směrových a normálových vektorech. Snažím se (i přeskočením některých předchozích příkladů), aby si to ozkoušeli všichni. Studenti většinou pro přímku nepoužijí rovnou vektor $\boldsymbol{u}$, ale vektor na něj kolmý. Říkám jim nejdříve jenom to, aby si ujasnili, co který z jejich vektorů znamená, případně si nakreslili obrázek. Při vysvětlování před třídou ho na tabuli kreslím také. Problém, který příklad obnažuje, se řeší celou následující hodinu.

**Př. 9:** Je dána přímka $p(A;\boldsymbol{u})$; $A[1;-2]$, $\boldsymbol{u} = (-1;2)$. Najdi obecnou rovnici přímky *r*, která je na přímku *p* kolmá a prochází bodem *A*.

Hledaná přímka je kolmá na přímku *p* $\Rightarrow$ normálový vektor přímky *r* se rovná směrovému vektoru přímky *p*: $\boldsymbol{n}_r = \boldsymbol{u}_p = (-1;2) \Rightarrow -x + 2y + c = 0$.

Dosadíme bod $A[1;-2]$: $-1 + 2(-2) + c = 0 \Rightarrow c = 5$.

Přímka *r* má obecnou rovnici $-x + 2y + 5 = 0$.

**Př. 10:** Najdi parametrické vyjádření přímky $p: 3x - 4y + 5 = 0$.

Pro parametrické vyjádření potřebujeme:

- směrový vektor: je kolmý na normálový $\boldsymbol{n}_p = (3;-4) \Rightarrow \boldsymbol{s}_p = (4;3)$,
- jeden bod přímky: zvolíme si jednu souřadnici, druhou spočítáme (například $x = 1 \Rightarrow$ $3x - 4y + 5 = 3\cdot 1 - 4y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A[1;2]$.

Parametrické vyjádření přímky *p*: $\begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t, t \in R \end{array}$.

**Dodatek:** Je možné postupovat i jinak:
vypočítat z obecné rovnice dva body a sestavit parametrické vyjádření s jejich pomocí,
jednu proměnnou vyjádřit pomocí parametru (1. rovnice $x = t$) a tímto vyjádřením ji nahradit v obecné rovnici (2. rovnice $3t - 4y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}t$),
Vyjádření, která získáme, budou obecně různá..

**Př. 11:** Petáková:
strana 105/cvičení 5
strana 105/cvičení 10
strana 106/cvičení 13 a)

**Shrnutí:**